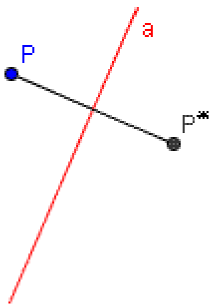
1.Wichtige geometrische Eigenschaften



1.Achsensymmetrie

Die Punkte P und P* sind **achsensymmetrisch** bzgl. der **Symmetrieachse** a.

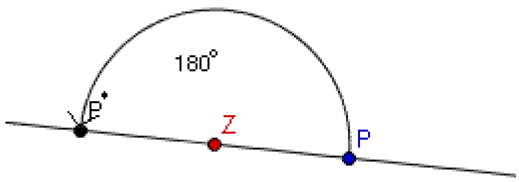
Es gilt:

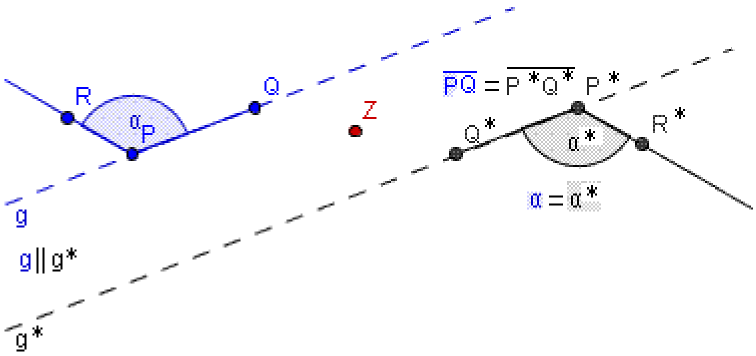
a)[PP*] wird von a rechtwinklig halbiert.
a ist Mittelsenkrechte von [PP*]. -> siehe Eigenschaften der Mittelsenkrechten.

b)Zueinander achsensymmetrische Strecken sind gleich lang, Winkel sind gleich groß (aber mit umgekehrtem Drehsinn), achsensymmetrische Figuren sind kongruent.

2. Punktsymmetrie

Die Punkte P und P* sind **punktsymmetrisch** mit **Symmetriezentrum** (oder **Spiegelzentrum**) Z, wenn sie durch eine Drehung um 180° um Z aufeinander zur Deckung kommen.





Es gilt:

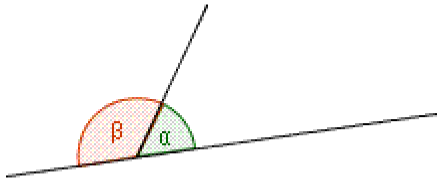
a)[PP*] wird durch Z halbiert. $\overline{PZ} = \overline{PZ^*}$

b)Zueinander punktsymmetrische Geraden sind parallel (g ∥ g*), Strecken sind gleich lang und parallel ($\overline{CA} = \overline{C^*A^*}$; [CA] ∥ [C*A*]), Winkel sind gleich groß und haben den gleichen Drehsinn ($\alpha = \alpha^*$).

© 2006 Gymnasium Neubiberg

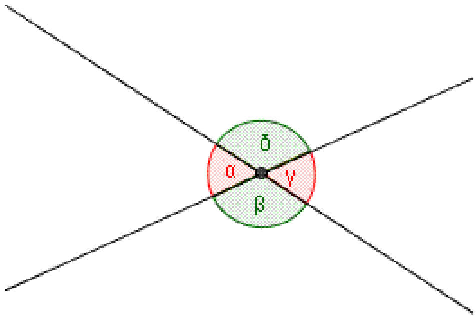
3. Winkel

a) Nebenwinkel



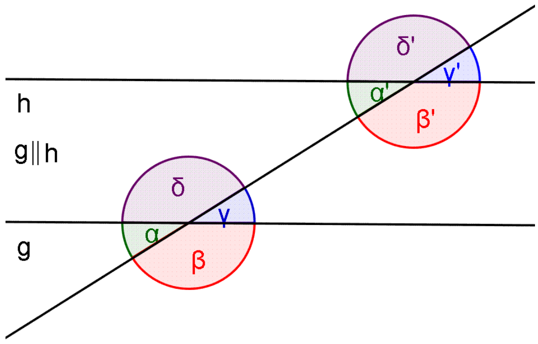
α und β sind **Nebenwinkel**. Sie ergänzen sich zu 180°.
$\alpha + \beta = 180°$

b) Scheitelwinkel



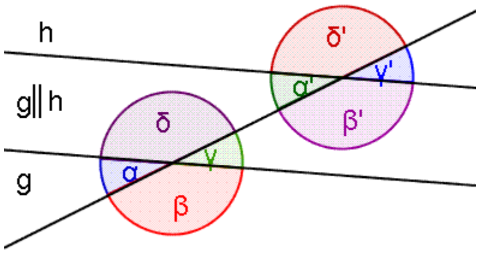
α und γ sowie β und δ sind **Scheitelwinkel**. Scheitelwinkel sind gleich groß.
$\alpha = \gamma,\ \beta = \delta$

c) Stufenwinkel



α und α', β und β', γ und γ', δ und δ' sind **Stufenwinkel**. Stufenwinkel an parallelen Geraden sind gleich groß.
Sind umgekehrt zwei Stufenwinkel gleich groß, so sind die Geraden parallel.
$\alpha = \alpha',\ \beta = \beta',\ \gamma = \gamma',\ \delta = \delta'$

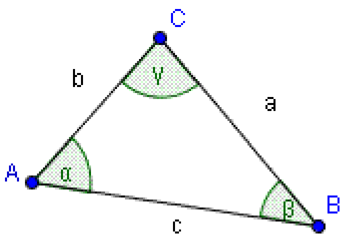
d) Wechselwinkel

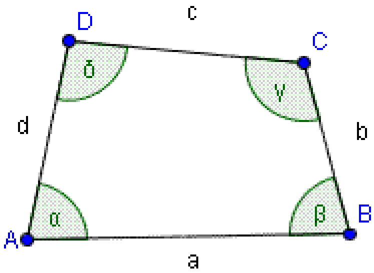


α und γ', β und δ', γ und α', δ und β' sind **Wechselwinkel**. Wechselwinkel an parallelen Geraden sind gleich groß.
Sind umgekehrt zwei Wechselwinkel gleich groß, so sind die Geraden parallel.

$\alpha = \gamma',\ \beta = \delta',\ \gamma = \alpha',\ \delta = \beta'$

4. Winkelsumme in Vielecken





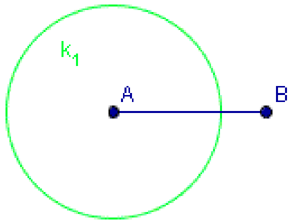
Die Summe der Innenwinkel im Dreieck beträgt 180°: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Die Summe der Innenwinkel im Viereck beträgt 360°: $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$.

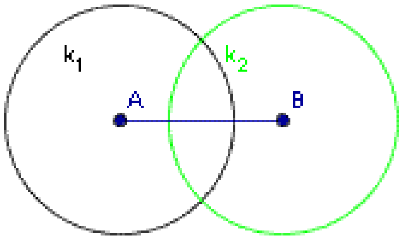
© 2006 Gymnasium Neubiberg

5.Grundkonstruktionen

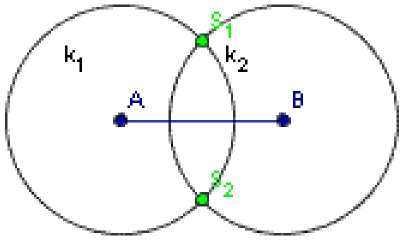
a) Konstruktion der Mittelsenkrechten zu [AB]



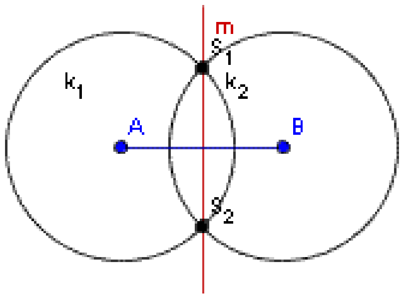
1. Zeichne einen Kreis k_1 um A mit einem Radius $r > \frac{\overline{AB}}{2}$.



2. Zeichne einen Kreis k_2 um B mit gleichem Radius.



3. k_1 und k_2 schneiden sich in S_1 und S_2.

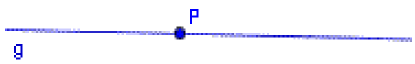


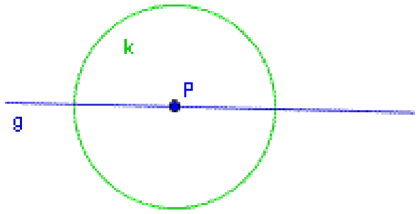
4. Die Gerade S_1S_2 ist die Mittelsenkrechte $m_{[AB]}$.

© 2006 Gymnasium Neubiberg

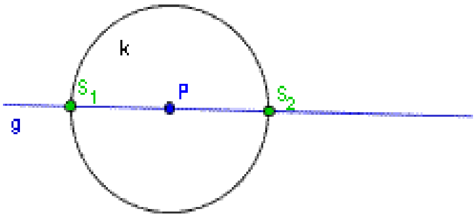
b) Konstruktion des Lots l zur Geraden g durch den Punkt P

$P \in g$

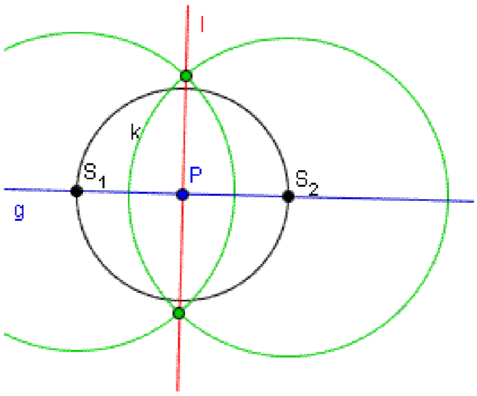




1. Zeichne einen Kreis k um P mit beliebigem Radius.



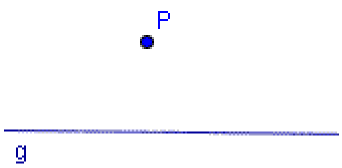
2. S_1 und S_2 sind die Schnittpunkte des Kreises k mit der Geraden g.

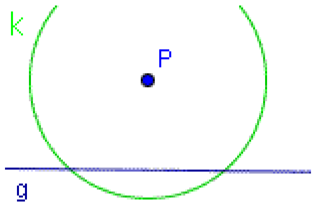


3. Konstruiere die Mittelsenkrechte der Strecke $[S_1S_2]$. Die Mittelsenkrechte ist das Lot l.

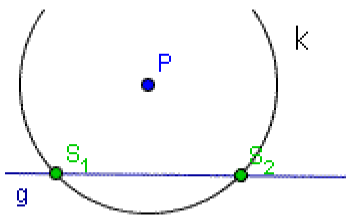
© 2006 Gymnasium Neubiberg

$P \notin g$

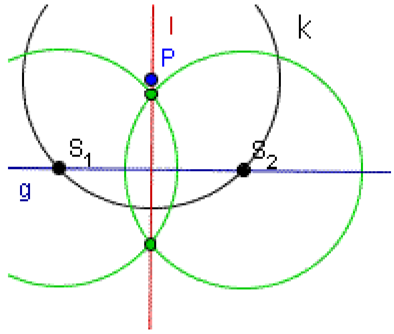




1. Zeichne einen Kreis k um P mit so großem Radius, dass er die Gerade g in zwei Punkten schneidet.



2. Die beiden Schnittpunkte des Kreises k mit g heißen S_1 und S_2.



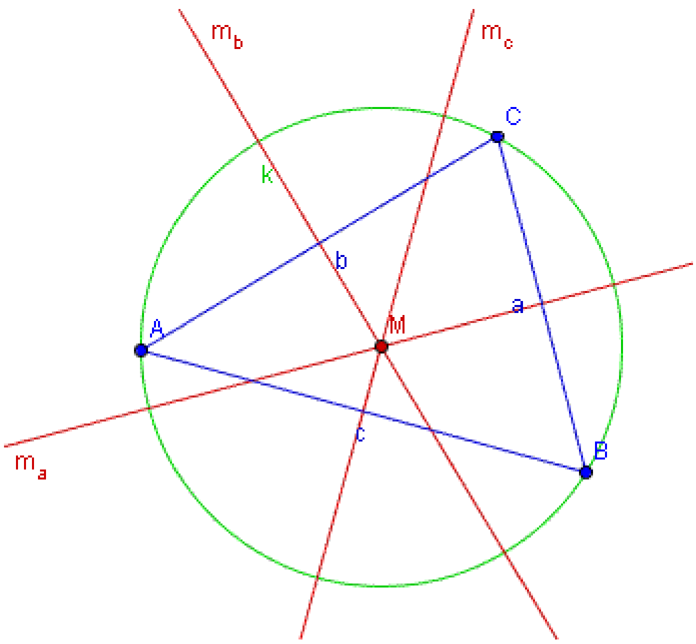
4. Konstruiere die Mittelsenkrechte der Strecke $[S_1S_2]$. Die Mittelsenkrechte ist das Lot l zu g durch P.

6.Mittelsenkrechte m der Strecke [PP']

a)Die Mittelsenkrechte ist Symmetrieachse der Strecke[PP'].

b)Alle Punkte der Mittelsenkrechten sind gleich weit von P und P' entfernt.

c)Ist ein Punkt Q gleich weit von P und P' entfernt, so liegt er auf der Mittelsenkrechten.



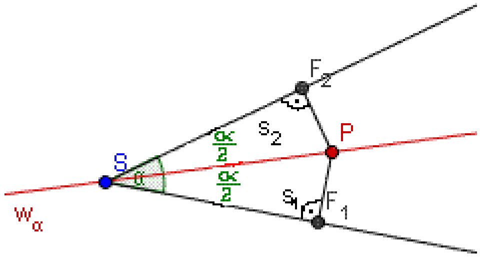
7.Mittelsenkrechten im Dreieck

a)Die Mittelsenkrechten jedes Dreiecks schneiden sich in einem Punkt M, dem **Mittelpunkt des Umkreises k**. Der Punkt M ist also gleich weit von allen Eckpunkten des Dreiecks entfernt.
$\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM}$

b)Der Schnittpunkt liegt bei einem stumpfwinkligen Dreieck außerhalb des Dreiecks.

© 2006 Gymnasium Neubiberg

8. Winkelhalbierende w_α des Winkels $\alpha = \angle(s_1,s_2)$

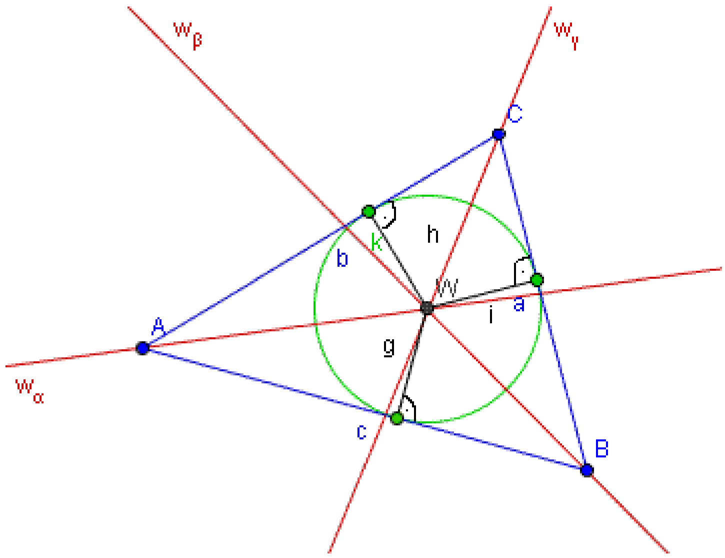


a) Die **Winkelhalbierende w_α** halbiert den Winkel α. Es kann dabei die Halbgerade oder Gerade (im Dreieck auch die Strecke bis zur gegenüberliegenden Dreiecksseite) gemeint sein.

b) Die Winkelhalbierende ist die Symmetrieachse des Winkels α , d.h. s_1 und s_2 sind bzgl. w_α achsensymmetrisch.

c) Jeder Punkt P der Winkelhalbierenden hat den gleichen Abstand von s_1 und s_2.
$\overline{F_1P} = \overline{F_2P}$

9. Die Winkelhalbierenden eines Dreiecks

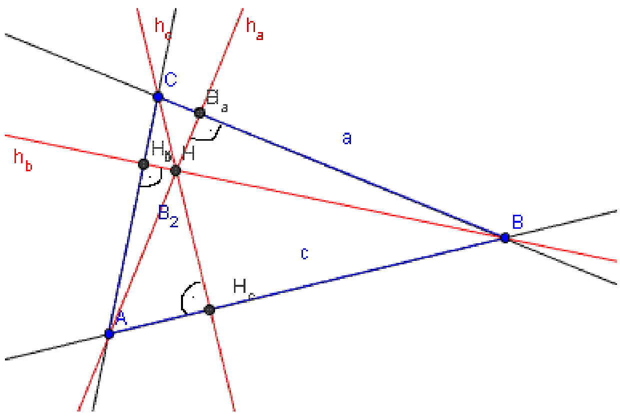


a) Die Winkelhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt W, dem **Mittelpunkt des Inkreises**. Der Punkt W hat also den gleichen Abstand von allen Dreiecksseiten.

b) Der Inkreis ist der größte Kreis, der in das Dreieck passt. Er berührt die drei Dreiecksseiten.

10. Höhen eines Dreiecks

a) Eine **Höhe** im Dreieck ist das Lot von einem Eckpunkt zur gegenüberliegenden Seite (oder deren Verlängerung). Es gibt immer drei Höhen in einem Dreieck.



b) Die Dreiecksfläche berechnet sich:

$$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} Grundseite \cdot (zugehöriger)\, Höhe \quad .$$

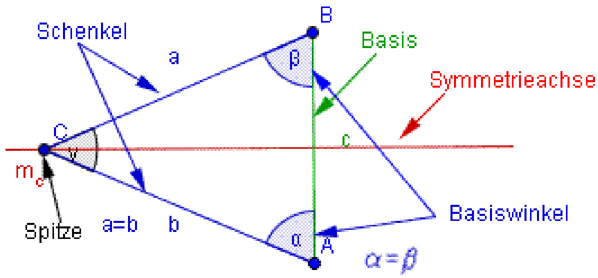
Dies gilt unabhängig davon, welche Grundseite gewählt wird.

c) Die Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt, dem **Höhenschnittpunkt** H. Der Punkt kann außerhalb des Dreiecks liegen.

11.Besondere Dreiecke und ihre Eigenschaften

a)Gleichschenkliges Dreieck

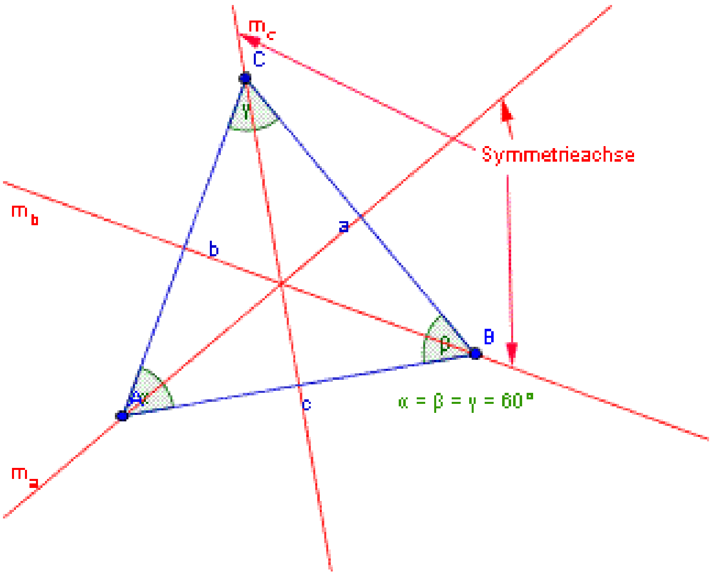
Zwei Seiten des Dreiecks, **die Schenkel**, sind gleich lang. Die dritte Seite heißt **Basis**.



Eigenschaften:
- Die der Basis anliegenden Winkel sind gleich groß (**Basiswinkel**).
- Das Dreieck besitzt eine Symmetrieachse, die **Mittelsenkrechte der Basis**.
- Die Symmetrieachse halbiert den Winkel an der Spitze.

b)Gleichseitiges Dreieck

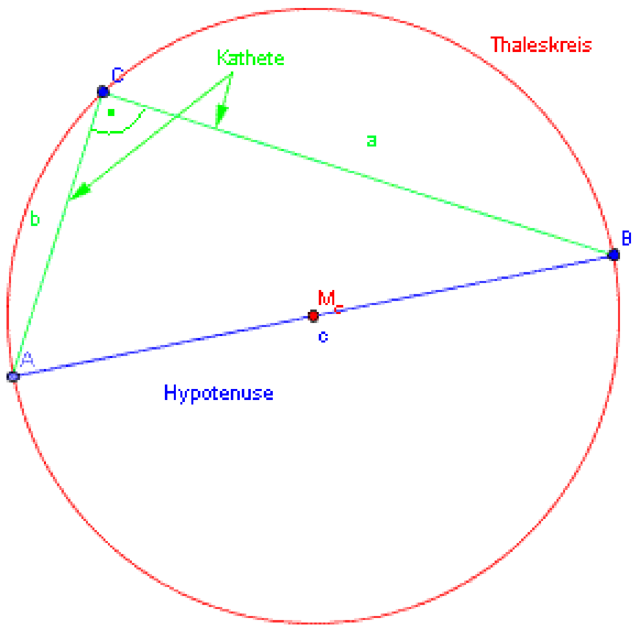
Alle drei Seiten des Dreiecks sind gleich lang.



Eigenschaften:
- Alle Innenwinkel betragen 60°.
- Das Dreieck hat drei Symmetrie-achsen, die Mittelsenkrechten der drei Dreiecksseiten.
- Die Mittelsenkrechten sind zugleich Winkelhalbierende und Höhen.

c)Rechtwinkliges Dreieck

Ein Winkel ist rechtwinklig. Die Dreiecksseiten, die an dem rechten Winkel anliegen, heißen **Katheten**, die ihm gegenüberliegende Seite **Hypotenuse**.



Eigenschaften:
- Der Scheitelpunkt des rechten Winkels liegt auf dem **Thaleskreis** (Kreis, dessen Durchmesser die Hypotenuse ist).
- Umgekehrt gilt: Liegt C auf dem Kreis, dessen Durchmesser die Strecke [AB] ist, so ist das Dreieck rechtwinklig mit $\gamma = 90°$.

© 2006 Gymnasium Neubiberg

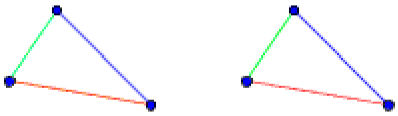
12. Kongruenzsätze

Zwei Figuren, die sich vollständig aufeinander zur Deckung bringen lassen, heißen **deckungsgleich** oder zueinander **kongruent**.

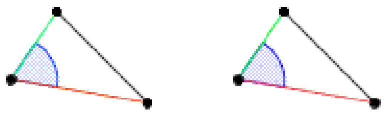
Kongruenzsätze für Dreiecke:

Zwei Dreiecke sind zueinander kongruent, wenn sie eine der folgenden Bedingungen erfüllen:

a) Sie stimmen in den Längen der drei Seiten überein (sss-Satz).

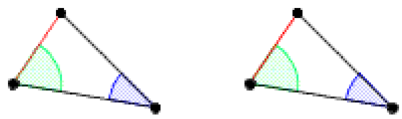


b) Sie stimmen in den Längen zweier Seiten und in der Größe des dazwischenliegenden Winkels überein (sws-Satz).

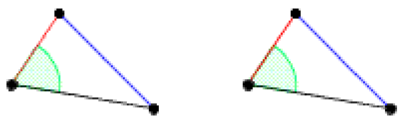


c) Sie stimmen in den Längen einer Seite und den Größen der beiden anliegenden Winkel überein (wsw-Satz).

d) Sie stimmen in den Längen einer Seite und der Größe eines anliegenden sowie des gegenüberliegenden Winkels überein (sww-Satz).

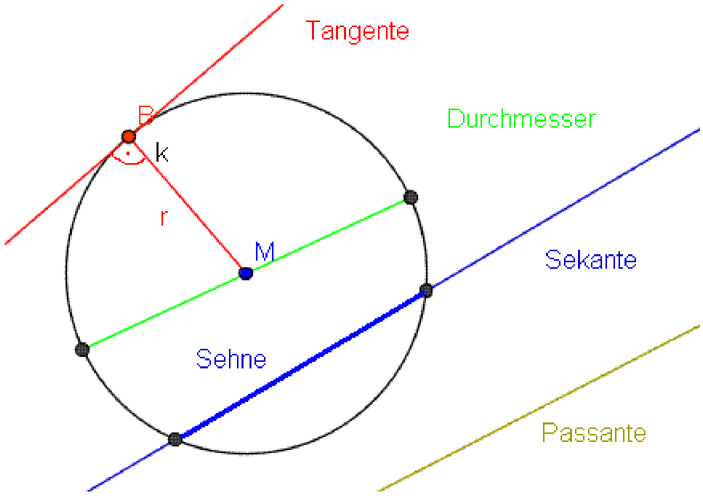


e) Sie stimmen in der Länge zweier Seiten und in der Größe des der längeren der beiden Seiten gegenüberliegenden Winkels überein (Ssw).



© 2006 Gymnasium Neubiberg

13. Geraden und Kreise



Eine Gerade heißt **Passante**, wenn sie einen Kreis nicht schneidet.

Eine Gerade heißt **Tangente**, wenn sie mit dem Kreis genau einen Punkt gemeinsam hat. Dieser heißt **Berührpunkt B**. Die Gerade ist senkrecht zu $\overline{BM}$.

Eine Gerade heißt **Sekante**, wenn sie den Kreis in zwei Punkten schneidet. Die Verbindungsstrecke zwischen den beiden Schnittpunkten heißt **Sehne**. **Durchmesser** heißen alle Sehnen durch M.

2. Terme

1. **Terme mit Variablen**:
   Terme können veränderliche Größen, sogenannte **Variablen**, enthalten. Diese Platzhalter werden in der Regel mit Buchstaben x, y, z, a, b, n dargestellt. Die Zahlen, die man in den Platzhalter einsetzen darf, bilden zusammen die **Grundmenge G**. Wird eine Zahl eingesetzt, so kann man den dazugehörigen **Termwert** bestimmen.

   Beispiel: $T(x)=\frac{x}{5}+3\cdot x^{2},\ G=\{-1;0.5;2\}$ gelesen: T von x gleich ...

   $$T(-1)=\frac{-1}{5}+3\cdot(-1)^{2}=\frac{-1}{5}+3=2\frac{4}{5}$$

   Vereinbarung: Sofern kein Missverständnis aufkommen kann, darf man das Malzeichen weglassen. Beispiele:

   $3\cdot a=3a \quad x\cdot y=xy \quad 2\cdot(2+x)=2(2+x) \quad y\cdot(3+2y)=y(3+2y)$
   $(3r-2)\cdot(4+2r)=(3r-2)(4+2r)$

2. **Termumformumgen**
   Zwei Terme mit Variablen sind **äquivalent**, wenn bei jeder möglichen Einsetzung für die Variablen die Termwerte gleich sind. Mit Hilfe von Rechengesetzen lassen sich Terme in äquivalente Terme umformen. Dadurch lassen sich Terme in einfachere überführen.

3. **Vereinfachen von Termen mit gleichartigen Koeffizienten**
   Besteht eine Summe oder eine Differenz aus mehreren Produkten gleichartiger Terme (d.h. sie unterscheiden sich nur in den Faktoren, die Zahlen sind), so können diese zusammengefasst werden.
   Beispiele: $4x^{2}+7x^{2}=11x^{2}$ und $8a-3a=5a$, nicht jedoch $2x+3x^{2}$.

4. **Vereinfachen von Produkten/Quotienten**
   $(24\cdot x)\cdot 3=24\cdot x\cdot 3=24\cdot 3\cdot x=72x$

   $(24\cdot x):3=24\cdot x:3=24:3\cdot x=8x$

   $(2\cdot a^{2}):(12a)=\frac{2\cdot a^{2}}{12a}=\frac{1}{6}a$

 © 2006 Gymnasium Neubiberg

5. **Das Distributivgesetz**

$3\cdot(a+b)=3\cdot a+3\cdot b$

$(2x-5y)\cdot x \;=\; 2x\cdot x-5y\cdot x \;=\; 2x^2-5xy$

$(5x+2y):x \;=\; 5x:x+2y:x \;=\; 5+2\frac{y}{x}$

6. **Ausmultiplizieren von Klammern**

Multipliziert man eine Summe oder Differenz mit einer anderen Summe oder Differenz, so wird jedes Glied der ersten Summe/Differenz mit jedem Glied der zweiten multipliziert. Dabei sind die Vor- und Rechenzeichen zu beachten!

$(3x-4y)\cdot(2x+7y)=3x\cdot 2x+3x\cdot 7y-4y\cdot 2x-4y\cdot 7y$

$=6x^2+21xy-8yx-28y^2$

$=6x^2+13xy-28y^2$

3. Gleichungen

1. Grundbegriffe

Gleichungen bestehen aus zwei Termen, die mit einem Gleichheitszeichen verbunden sind.

Beispiel: $3x-2=4+x$.

Wenn man anstelle der Variablen eine Zahl in die Gleichung einsetzt, so erhält man eine **wahre** oder eine **falsche Aussage**.

Für das Beispiel:

1) x=2 eingesetzt:

$$3\cdot 2-2 = 4+2$$
$$6-2 = 6$$
$$4 = 6 \;(f)$$

falsche Aussage

2) x=3 eingesetzt:

$$3\cdot 3-2 = 4+3$$
$$9-2 = 7$$
$$7 = 7 \;(w)$$

wahre Aussage

Die Menge aller Zahlen, die man in die Variable einsetzen darf, heißt **Grundmenge G**. Alle Zahlen der Grundmenge, die in die Gleichung eingesetzt zu einer wahren Aussage führen, bilden die **Lösungsmenge L**.

Bei diesem Beispiel: $L=\{3\}$.

Wenn keine Zahl der Grundmenge in die Gleichung eingesetzt eine wahre Aussage ergibt, so ist die Lösungsmenge die **leere Menge** ($\emptyset$ oder $\{\}$).

Führen alle Zahlen der Grundmenge zu einer wahren Aussage, so ist die Lösungsmenge gleich der Grundmenge.

2.**Das Lösen von Gleichungen mit Hilfe von Äquivalenzumformungen**

Zwei Gleichungen heißen äquivalent, wenn sie die gleiche Lösungsmenge besitzen. Bei komplizierteren Gleichungen kann man durch Äquivalenzumformungen die Lösungsmenge bestimmen. Die Lösungsmenge einer Gleichung ändert sich nicht, wenn man

a)eine Seite der Gleichung durch einen zu ihr äquivalenten Term ersetzt.

b)zu beiden Seiten der Gleichung eine Zahl oder ein Term der Form 2x, $\frac{1}{3}x^2-2{,}3x^3$ oder $\frac{5}{4}x-1\frac{3}{7}$ addiert bzw. subtrahiert.

c)beide Seiten der Gleichung mit demselben, **von 0 verschiedenen** Term multipliziert oder durch diesen auf beiden Seiten dividiert.

Beispiele:

i) Beachte die Grundmenge!

$$G=\mathbb{Z}$$
$$\begin{aligned} 3x+7 &= -2x-4 \mid +2x-7 \\ 3x+7+2x-7 &= -2x-4+2x-7 \\ 5x &= -11 \mid :5 \\ x &= -\frac{11}{5} \notin \mathbb{Z} \end{aligned}$$
$$L=\emptyset$$

$$G=\mathbb{Q}$$
$$\begin{aligned} 3x+7 &= -2x-4 \mid +2x-7 \\ 3x+7+2x-7 &= -2x-4+2x-7 \\ 5x &= -11 \mid :5 \\ x &= -\frac{11}{5} \in \mathbb{Q} \end{aligned}$$
$$L=\{-2\frac{1}{5}\}$$

ii) $G=\mathbb{Q}$. **Richtig** ist dieser Lösungsweg:

$$\begin{aligned} 4x &= 3x \mid -3x \\ 4x-3x &= 3x-3x \\ x &= 0 \end{aligned}$$
$$L=\{0\}$$

Falsch dagegen der folgende Ansatz:

$$\begin{aligned} 4x &= 3x \mid :x \\ 4x:x &= 3x:x \\ 4 &= 3 \end{aligned}$$
$$L=\emptyset$$

Die Division beider Seiten durch x ist nicht erlaubt, da x auch 0 sein kann, denn die Grundmenge ist $\mathbb{Q}$.

iii) Lösen einer schwierigeren Gleichung! $G=\mathbb{Q}$

$$
\begin{aligned}
(7x+9)\cdot(-10)+5(11-6x) &= 4x^2-76x+25-4x^2 \\
-70x-90+55-30x &= -76x+25 \\
-100x-35 &= -76x+25 \quad |\ +76x+35 \\
-100x-35+76x+35 &= -76x+25+76x+35 \\
-24x &= 60 \quad |\ :(-24) \\
x &= -2{,}5 \in \mathbb{Q}
\end{aligned}
$$

$$L=\{-2{,}5\}$$

a) Vereinfachen beider Seiten soweit wie möglich.

b) Durch Addition/ Subtraktion die Summanden mit einer Variablen und die ohne auf verschiedene Seiten bringen.

c) Faktoren vor der Variablen durch Multiplikation/ Division „auf die andere Seite bringen".

© 2006 Gymnasium Neubiberg

4.Rechnen im Alltag

1.Arithmetisches Mittel

Das **arithmetische Mittel** (auch **Mittelwert**, **Durchschnitt**) gibt bei einer Menge von (quantitativen) Daten Auskunft über die ungefähre Mitte.

$$\mathit{Durchschnitt}=\frac{\mathit{Summe\ der\ Einzelwerte}}{\mathit{Anzahl\ der\ Einzelwerte}}$$

Beispiele:

a) Bei einem Weitsprung erzielt ein Teilnehmer folgende Weiten: 4,05m, 3,92m, 4,27m, d.h. er ist 3-mal gesprungen.

$$\mathit{mittlere\ Sprungweite}=\frac{4{,}05\,m+3{,}92\,m+4{,}27\,m}{3}=4{,}08\,m$$

b)Bei einer Schulaufgabe erzielten 10 Schüler die folgenden Noten:
1 (1-mal), 2 (3-mal), 3 (4-mal),5 (1-mal), 6 (1-mal).

$$\mathit{Notendurchschnitt}=\frac{1+\overbrace{2+2+2}^{3\,*}+\overbrace{3+3+3+3}^{4*}+5+6}{10}=\frac{1\cdot 1+3\cdot 2+4\cdot 3+1\cdot 5+1\cdot 6}{10}=3$$

2. Vertiefung der Prozentrechnung

a)**Erhöhung des Grundwertes**:
Wenn der alte Preis um p Prozent erhöht wird, berechnet sich der neue Preis folgendermaßen:

$$P_{neu}=(1+\frac{p}{100})\cdot P_{alt}$$

$1+\frac{p}{100}$ nennt man den **Wachstumsfaktor**.

b)**Verminderung des Grundwertes**:
Wird der alte Preis wird um p Prozent reduziert, so rechnet man:

$$P_{neu}=\left(1-\frac{p}{100}\right)\cdot P_{alt}$$

$1-\frac{p}{100}$ nennt man den **Abnahmefaktor**.

© 2006 Gymnasium Neubiberg