1 Potenzen

1. **Definition:** (vgl. Grundwissen Klasse 5 Nr. 1.5)

Für $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ Faktoren}} = \underbrace{\frac{1}{a} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{a}}_{n\ Faktoren} \text{. Ferner: } a^0 = 1 \text{ .}$$

Beispiele:

(1) $4^{-1} = \frac{1}{4}$ (2) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 1 : \frac{1}{4} = 1 \cdot \frac{4}{1} = 4$

(3) $3^{-4} = \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{81}$ (4) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \frac{1}{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{81}{16}$

2. **Wissenschaftliche Schreibweise mit Hilfe von Zehnerpotenzen**:

Um sehr große und sehr kleine Zahlen schreiben zu können, benutzt man die **wissenschaftliche Schreibweise** oder **Gleitkommadarstellung**.

Beispiele:

(1) $2000000 = 2 \cdot 10^6$; (2) $0{,}0000234 = \frac{2{,}34}{100000} = 2{,}34 \cdot 10^{-5}$

Für den Faktor a vor der Zehnerpotenz gilt dabei immer: $1 \leq |a| < 10$.

3. Potenzgesetze für ganzzahlige Exponenten:

Für $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ und $p, q \in \mathbb{Z}$ gelten die folgenden Rechengesetze:

a) $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ und $a^p : a^q = \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$

Beispiele:

(1) $2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$ (2) $2^3 \cdot 2^{-4} = 2^{3+(-4)} = 2^{-1}$ (3) $2^4 : 2^{-3} = 2^{4-(-3)} = 2^7$

b) $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$

Beispiel:

(1) $(2^3)^4 = (2)^{3 \cdot 4} = 2^{12}$ (2) $(2^{-3})^4 = (2)^{(-3) \cdot 4} = 2^{-12}$ (3) $(2^{-3})^{-4} = (2)^{(-3) \cdot (-4)} = 2^{12}$

c) $a^p \cdot b^p = (a \cdot b)^p$ und $a^p : b^p = \dfrac{a^p}{b^p} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^p$

Beispiele:

(1) $2^{-3} \cdot 4^{-3} = (2 \cdot 4)^{-3} = 8^{-3}$ (2) $4^3 : 2^3 = (4:2)^3 = \left(\dfrac{4}{2}\right)^3 = 2^3$

2 Funktionen

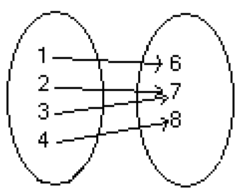
1. Zuordnungen

Bei einer Zuordnung wird einer **unabhängigen Variablen** (**meist x**) eine **abhängige Variable** (meist y) zugeordnet. Eine Zuordnung kann durch ein **Schaubild (Graph)** (1;2)**,** eine **Tabelle** (3) oder eine **Zuordnungsvorschrift** (**Term)** (4) beschrieben werden.

Definitionsmenge D:
Menge aller zulässigen Werte für die unabhängige Variable x

Wertemenge W:
Menge aller zulässigen Werte für die abhängige Variable y

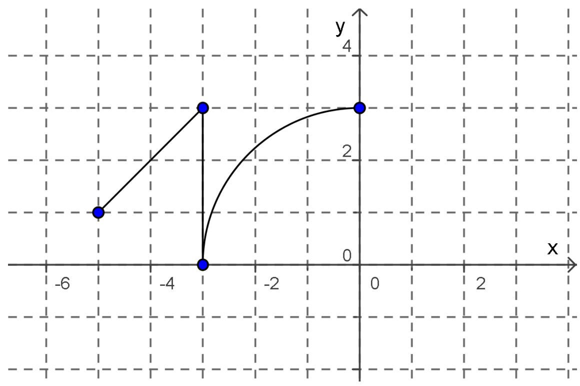
(1)



D = { 1;2;3;4}

W= {6;7;8}

(2)



D = [-5;0]

W=[0;3]

Beim Graph ist die unabhängige Variable **immer** die x-Koordinate, die abhängige **immer** die y-Koordinate

(3)

x	y
3	-1
4	7
5	-
6	-1

D = {3;4;5;6}
W = {-1;7}

(4)

der Seitenlänge a eines Quadrates wird der Flächeninhalt zugeordnet:

a -> $A(a) = a^2$

D = $\mathbb{Q}^+$
W = $\mathbb{Q}^+$

2. Funktionen

Eine Zuordnung, bei der jedem x der Definitionsmenge **genau ein** y der Wertemenge zugeordnet ist, nennt man eine **Funktion**. „genau ein" bedeutet nicht mehr als ein Wert, aber auch nicht weniger.

Funktionsterm Definitionsmenge

$$f:\ \underbrace{f(x)=\overbrace{x^2-1}^{\text{Funktionsterm}};\ D_f=\mathbb{Q}}_{\text{Funktionsgleichung}}$$

Funktionsname **Funktionsgleichung**

Demnach sind die Beispiele (1) und (4) Funktionen.
Beim Beispiel (2) sind dem Wert x = -1,5 unendlich viele y-Werte zugeordnet, bei (3) ist dem Wert x=5 der Definitionsmenge kein y-Wert zugeordnet.

Ermittlung von Funktionswerten u.ä.:

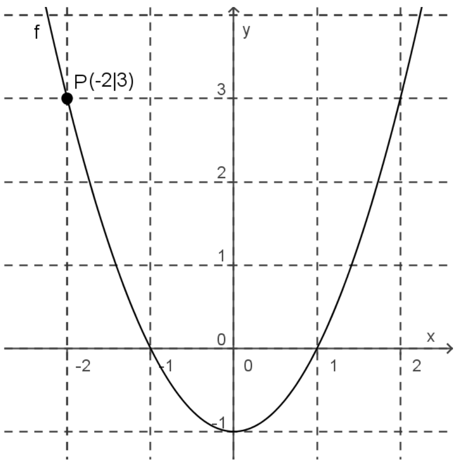
a)Beispiel:

$f:\ f(x)=x^2-1;\ D_f=\mathbb{Q}$.

Für $x=-2$ soll der dazugehörige Funktionswert ermittelt werden:

$f(-2)\ =\ (-2)^2-1\ =\ 4-1\ =\ 3$.

Der Punkt $P(-2|3)$ liegt damit auf dem Funktionsgraphen von f .



b) **Nullstellen** einer Funktion sind die x-Werte, für die der Funktionswert 0 ist.
Beispiel:

- $g: \; g(x) = 2x+3; \; D_g = \mathbb{Q}$

  Für die Nullstellen gilt $g(x)=0$, d.h.

  $$\begin{aligned} 2x+3 &= 0 \quad &&| -3 \\ 2x &= -3 \quad &&| :2 \\ x &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

  Die Funktion hat also eine Nullstelle bei $x=-1{,}5$.

- $f: \; f(x) = x^2-1; \; D_f = \mathbb{Q}$. Also

  $$\begin{aligned} x^2-1 &= 0 \quad &&| +1 \\ x^2 &= 1 \end{aligned}$$

  $$x = 1 \quad \textit{oder} \quad x = -1$$

  Die Funktion hat somit zwei Nullstellen.

3. Funktionen der direkten Proportionalität

Zwei Größen sind zueinander **direkt proportional**, wenn folgende Beziehung immer gilt:
verdoppelt sich die eine Größe -> verdoppelt sich die andere Größe
verdreifacht sich die eine Größe -> verdreifacht sich die andere Größe
halbiert sich die eine Größe -> halbiert sich die andere Größe
0 -> 0
Beispiel:

Benzin [l] -> Preis [€]

$$1\,l \xrightarrow{\cdot 15} 15\,l \xrightarrow{\cdot 2} 30\,l \xrightarrow{:3} 10\,l \xrightarrow{\cdot 2,5} 25\,l$$

Benzin [l]	1 l	15 l	30 l	10 l	25 l	0 l
Preis [€]	1,30 €	19,50 €	39 €	13 €	32,50 €	0 €

$$1{,}30\,€ \xrightarrow{\cdot 15} 19{,}50\,€ \xrightarrow{\cdot 2} 39\,€ \xrightarrow{:3} 13\,€ \xrightarrow{\cdot 2,5} 32{,}50\,€$$

Für Werte ungleich 0 gilt: Das Verhältnis beider Größen ist konstant, der **Proportionalitätsfaktor k**:

$$\frac{1{,}30\,€}{1\,l} = \frac{19{,}50\,€}{15\,l} = \frac{39\,€}{30\,l} = \frac{13\,€}{10\,l} = \frac{32{,}50\,€}{25\,l} = k \; .$$

Funktionen der direkten Proportionalität sind Funktionen, die eine Funktionsgleichung der Form $f(x)=m \cdot x;\ D_f=\mathbb{Q}$ haben.
Die Konstante **m** heißt **Steigung**.
Ihre x-Werte und f(x)-Werte sind direkt proportional zueinander:
Für $x \neq 0$ gilt: $\frac{f(x)}{x} = m$.
Damit ist die Steigung m nichts anderes als der Proportionalitätsfaktor k.
Der Graph dieser Funktionen ist eine **Gerade durch den Ursprung des Koordinatensystems**.

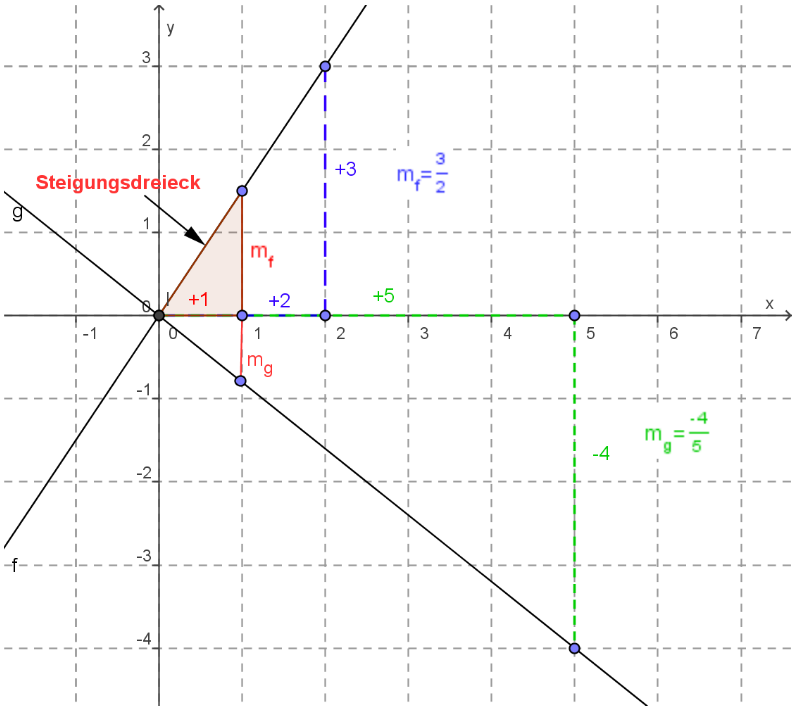
Beispiele:

(1) $f:\ f(x)=\frac{3}{2} \cdot x;\ D_f=\mathbb{Q}$.

Hier gilt: $m_f = \frac{3}{2}$.

(2) $g:\ g(x)= -\frac{4}{5} \cdot x;\ D_g=\mathbb{Q}$

Hier gilt: $m_g = -\frac{4}{5}$.

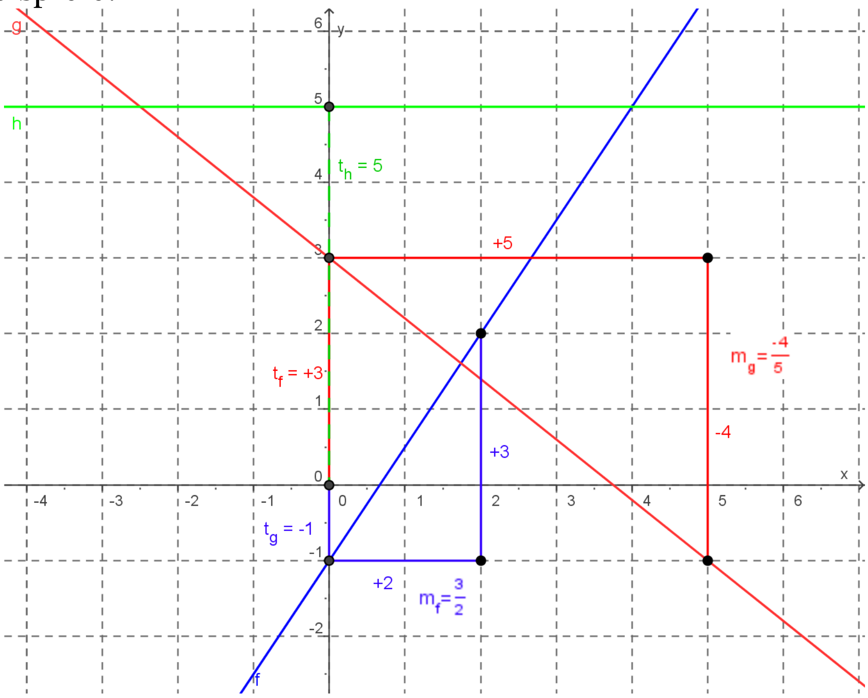


4. Lineare Funktionen

a) **Definition:**

Lineare Funktionen sind Funktionen mit einer Funktionsgleichung der Form:
$f(x)=m \cdot x+t$.
Ihr Funktionsgraph ist eine Gerade.
Die Konstante **m** heißt **Steigung**, die Konstante **t y-Achsenabschnitt**.

Beispiele:



(1) $f:\ f(x)=\frac{3}{2}\cdot x-1;\ D_f=\mathbb{Q}$, d.h. $m=\frac{3}{2}>0$: **steigende Gerade**.

(2) $g:\ g(x)=-\frac{4}{5}\cdot x+3;\ D_f=\mathbb{Q}$, d.h. $m=\frac{-4}{5}<0$: **fallende Gerade**.

(3) $h:\ h(x)=0\cdot x+5;\ D_f=\mathbb{Q}$, d.h. $m=0$: **zur x-Achse parallele Gerade**.
$h(x)=5$

b) **Geraden und lineare Funktionen**:

Der Graph jeder linearen Funktion ist eine Gerade.
Umgekehrt kann man jede Gerade, die nicht Parallele zur y-Achse ist, mit Hilfe der Geradengleichung $g:\ y=m\cdot x+t$ beschreiben.
Parallelen zur y-Achse sind keine Funktionsgraphen und können immer in der Form $x=c$ für eine Zahl $c\in\mathbb{Q}$ geschrieben werden.

c)**Bestimmung der Geradengleichung einer Geraden** (keine Parallele zur y-Achse) **durch zwei gegebene Punkte**:

$P(3|4)$ und $Q(5|1)$

- Bestimmung der Steigung m: $m=\frac{y_Q-y_P}{x_Q-x_P}$, hier $m=\frac{1-4}{5-3}=\frac{-3}{2}$.

- Bestimmung des y-Achsenabschnitts t durch Einsetzen der Koordinaten eines der beiden Punkte (z.B. P(3|4)) in die Geradengleichung $y=-\frac{3}{2}\cdot x+t$:

$$\begin{aligned} 4 &= -\frac{3}{2}\cdot 3 + t \\ 4 &= -\frac{9}{2} + t \quad \Big|\ +\frac{9}{2} \\ 8{,}5 &= t \end{aligned}$$

Die Geradengleichung heißt also: $y=-\frac{3}{2}\cdot x+8{,}5$.

d) **Besondere Eigenschaften der Steigung:**

Parallele Geraden ($g\|h$) haben die gleiche Steigung: $m_g=m_h$.
Sind zwei Geraden zueinander senkrecht $g\perp h$, so gilt: $m_g\cdot m_h=-1$.

5. Funktionen der indirekten Proportionalität:

Zwei Größen sind zueinander **indirekt proportional**, wenn folgende Beziehung immer gilt:
verdoppelt sich die eine Größe -> halbiert sich die andere Größe
verdreifacht sich die eine Größe -> drittelt sich die andere Größe
halbiert sich die eine Größe -> verdoppelt sich die andere Größe
Das Produkt beider Größen bleibt immer gleich einer Zahl $a\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$.

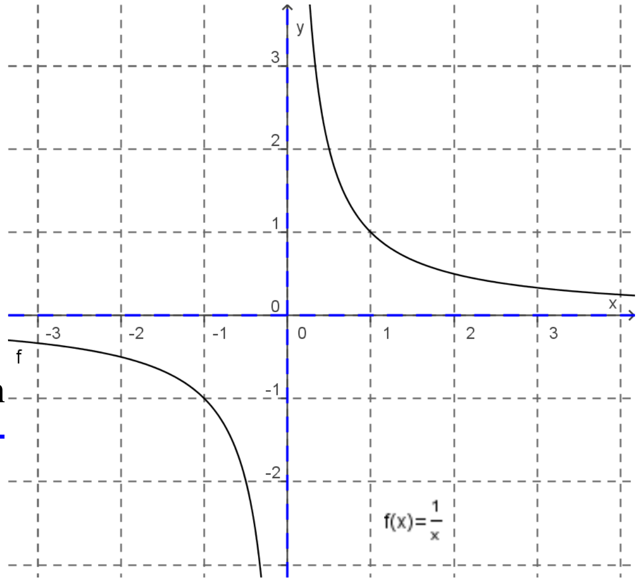
Beispiel:
Ein Wasserbecken wird von x gleichen Rohren in der Zeit t gefüllt.

$\cdot 2$ $\cdot 1{,}5$ $\cdot\frac{4}{3}$ $\cdot 2$ $\cdot 6$

Anzahl x	1	2	3	4	8	48
Zeit t	24 h	12 h	8 h	6 h	3 h	30 min

$:2$ $:1{,}5$ $:\frac{4}{3}$ $:2$ $:6$

Funktionen der indirekten Proportionalität haben eine Funktionsgleichung der Form $f(x) = \frac{a}{x}$ mit $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.
Die Definitionsmenge ist $D_f = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Der Funktionsgraph heißt **Hyperbel**.



Da sich die Äste des Funktionsgraphen der x- und y-Achse annähern, nennt man die x-Achse die **waagerechte Asymptote**, die y-Achse die **senkrechte Asymptote**.

6.Gebrochen rationale Funktionen

Der Funktionsterm einer **gebrochen rationalen Funktion** ist ein Bruchterm, bei dem Zähler- und Nennerterm Terme sind, die aus den Potenzen der Variablen x, Grundrechenarten und Klammern bestehen (z.B. $3x^4 - \frac{5}{8}x^3 + 3{,}4x^2 + 9$) .
Wenigstens im Nennerterm muss dabei die Variable x vorkommen. Ihre Eigenschaften und ihre Funktionsgraphen können sehr unterschiedlich sein.
Nullstellen des Nennerterms gehören nicht zur Definitionsmenge (durch 0 darf nicht dividiert werden). Man nennt sie **Defintionslücken**.

Beispiele:

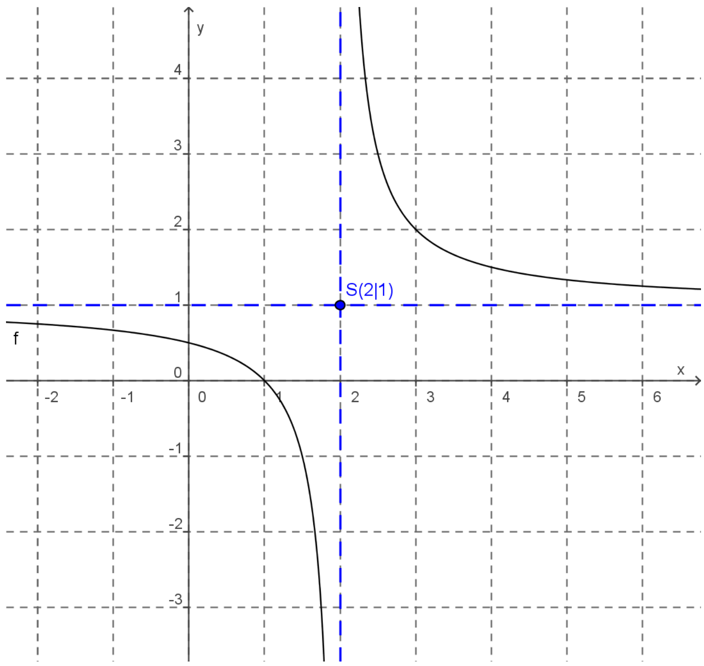
(1) $f: f(x) = \frac{x-1}{x-2};\ D_f = \mathbb{Q} \setminus \{2\}$

Die Funktion hat eine Definitionslücke bei x=2.

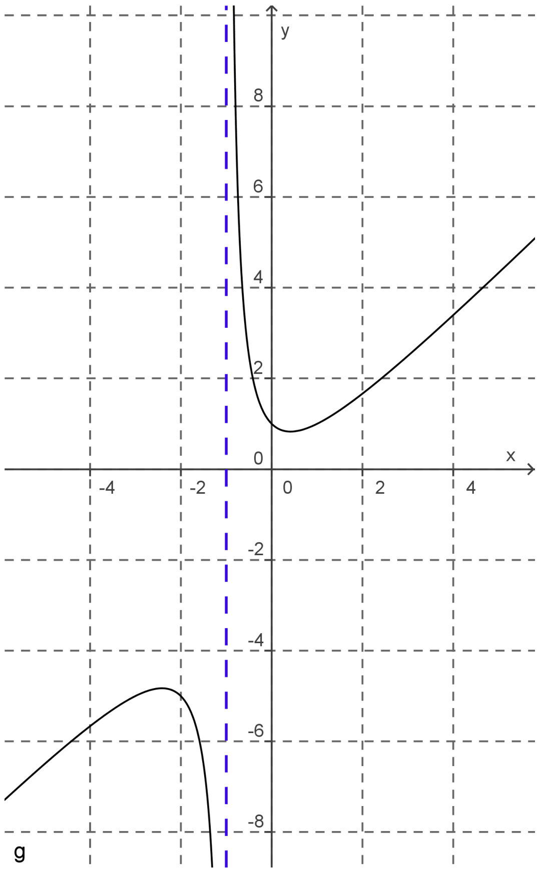
Der Graph ist eine verschobene Hyperbel. Es gilt:

$$\frac{x-1}{x-2} = \frac{(x-2)+1}{x-2} = 1 + \frac{1}{x-2}$$

Die **waagerechte Asymptote** ist die Gerade y=1, die **senkrechte Asymptote** die Gerade x=2. Ihr Schnittpunkt der Punkt S(2|1).



(2) $g:\ g(x)=\dfrac{x^2+1}{x+1};\ D_g=\mathbb{Q}\setminus\{-1\}$



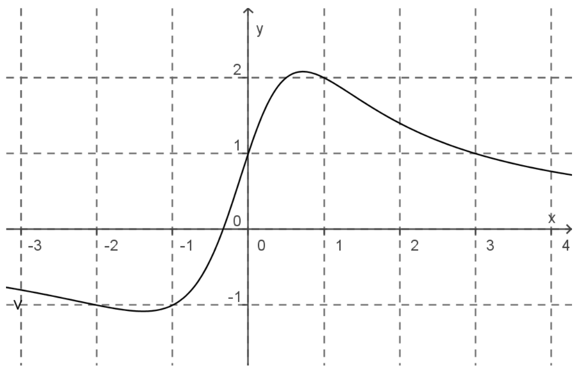
Die Funktion besitzt eine Definitionslücke in $x=-1$.

Wertetabelle:

x	-2,5	-2	-1	0	2	3	4
g(x)	$-4\frac{5}{6}$	-5	-	1	$\frac{5}{3}$	2,5	3,4

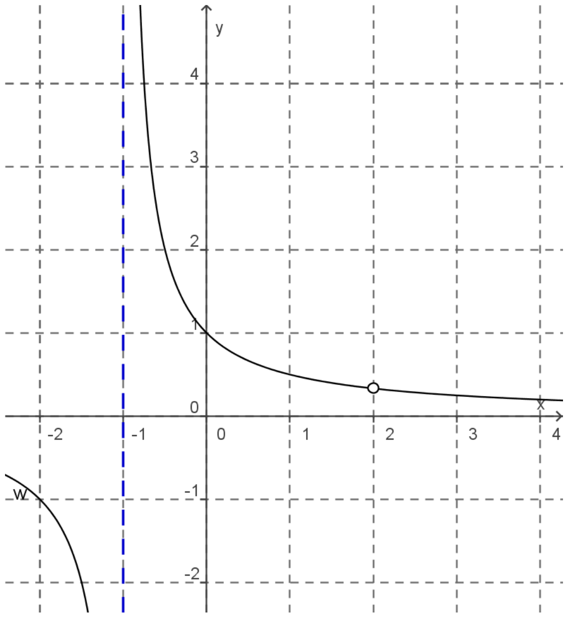
(3) $v:\ v(x)=\dfrac{3x+1}{x^2+1};\ D_v=\mathbb{Q}$

Der Nennerterm ist immer größer oder gleich 1, deshalb besitzt die Funktion keine Definitionslücke.



(4) $w:\ w(x)=\frac{x-2}{(x-2)(x+1)};\ D_w=\mathbb{Q}\setminus\{-1;2\}$

Für $x=2$ und $x=-1$ ist der Nennerterm 0, deshalb besitzt die Funktion dort Definitionslücken.



3 Ungleichungen

1. Ungleichungen

Ungleichungen bestehen aus zwei Termen, die durch ein Ungleichheitszeichen miteinander verbunden sind.

$\leq$ bedeutet „kleiner oder gleich“
$\geq$ bedeutet „größer oder gleich“

Beispiele:

(1) $x>3;\ G=\{1;2;3;4\}$ (2) $y<\frac{2}{3};\ G=\mathbb{Q}$ (3) $z\leq 0;\ G=\mathbb{Z}$

(4) $u\geq -2{,}5;\ G=\mathbb{Q}$

Die **Grundmenge G** ist die Menge aller Zahlen, die in die Variable eingesetzt werden dürfen.
Die **Lösungsmenge L** ist die Menge aller Zahlen der Grundmenge, die in die Ungleichung eingesetzt eine wahre Aussage ergeben.
Beispiel:

a) Für Ungleichung (1) gilt:
$4>3$ ist eine wahre Aussage, also ist 4 in der Lösungsmenge.
$2>3$ ist eine falsche Aussage, also ist 2 kein Element der Lösungsmenge.
$L=\{4\}$

b) Für Ungleichung (2) gilt:

$L=\left\{y|\ y<\frac{2}{3}\right\}$ **Mengenschreibweise**

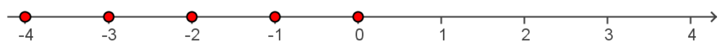
$L=\left]-\infty;\frac{2}{3}\right[$ **Intervallschreibweise**

unendlich

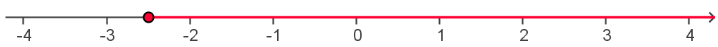
Klammern zeigen nach außen: $-\infty$ und $\frac{2}{3}$ gehören selbst nicht zur Lösungsmenge

c) Für Ungleichung (3) gilt:

$L=\{\ldots;-3;-2;-1;0\}=\{z\in\mathbb{Z}|z\leq 0\}$



d) Für Ungleichung (4) gilt:



$L=\{u\in\mathbb{Q}|u\geq -2{,}5\} = [-2{,}5;+\infty[$

2. Äquivalenzumformung bei Ungleichungen

Das sind Umformungen, die eine Ungleichung in eine andere, **äquivalente** (mit **gleicher Lösungsmenge)** überführen:

a) Addition/Subtraktion beider Seiten mit dem gleichen, (über G definierten) Term.

b) Multiplikation/Division beider Seiten mit derselben **positiven Zahl** oder demselben Term, dessen Termwert immer positiv ist.

c) Multiplikation/Division beider Seiten mit derselben **negativen Zahl** oder demselben Term, dessen Termwert immer negativ ist, **unter gleichzeitiger Umkehrung der Ungleichheitszeichen**.

$<$ zu $>$; $>$ zu $<$; $\leq$ zu $\geq$; $\geq$ zu $\leq$

Beispiel: $G=\mathbb{Q}$

$$
\begin{array}{rcll}
0{,}5(x+8) & < & 2(2{,}5x-7) & \\
0{,}5x+4 & < & 5x-14 & \mid -4 \\
0{,}5x & < & 5x-18 & \mid -5x \quad \text{also} \quad L=\{x|x>4\}=]4;+\infty[\\
-4{,}5x & < & -18 & \mid :(-4{,}5) \\
x & > & 4 &
\end{array}
$$

4 Lineare Gleichungssysteme

1. **Definition**

Zwei lineare Gleichungen mit zwei Variablen bilden ein **lineares Gleichungssystem**.
Grundmenge G: $(x|y)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$
Lösungsmenge L : Menge aller Zahlenpaare (x|y), die beide Gleichungen erfüllen.

Beispiel:

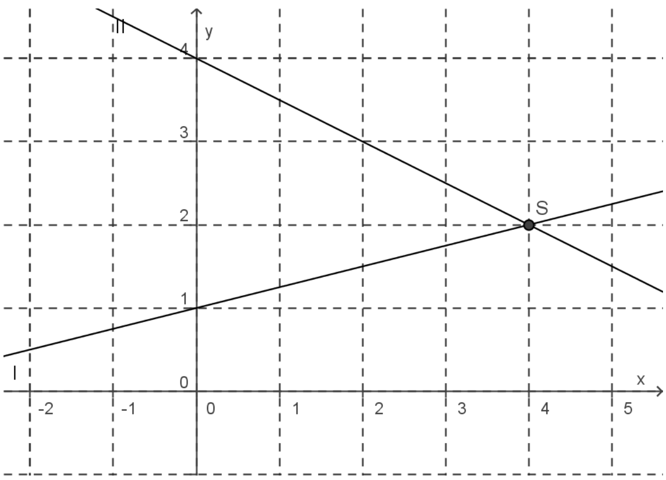
$I:\ x+2y=8$ und $II:\ -x+4y=4$

Jede, der beiden linearen Gleichungen besitzt unendlich viele Lösungen, denen die Punkte auf der jeweiligen Gerade entsprechen. Aber nur die Koordinaten des Schnittpunkts S(4|2) beider Geraden erfüllen beide Gleichungen: $L=\{(4|2)\}$.

2. **Lösen eines linearen Gleichungssystems**

a) **Graphische Lösung**:

Zeichnen beider Geraden und Bestimmung des Schnittpunktes (der Schnittpunkte) aus der Zeichnung.



b) Rechnerische Lösung: (obiges Beispiel)

- **Gleichsetzungsverfahren**:
  - Auflösen beider Gleichungen nach derselben Variable:
    $I:\ x=-2y+8$ und $II:\ x=4y-4$
  - Gleichsetzen beider rechten Seiten:
    $-2y+8 = 4y-4$
  - Lösen der Gleichung:
    $$\begin{array}{rcll} -2y+8 &=& 4y-4 & \mid +2y \\ 8 &=& 6y-4 & \mid +4 \\ 12 &=& 6y & \mid :2 \\ 2 &=& y & \end{array}$$
  - Einsetzen des Ergebnisses in eine der beiden Gleichungen, z.B. in II :
    $$\begin{array}{rcl} x &=& 4\cdot 2-4 \\ x &=& 8-4 \\ x &=& 4 \end{array}$$
  - Notieren der Lösungsmenge: $L=\{(4|2)\}$.
- **Einsetzungsverfahren**:
  - Auflösen einer Gleichung nach einer Variablen, z.B. II nach x :
    $II:\ x=4y-4$
  - Einsetzen dieses Termes (hier für x) in die <u>andere</u> Gleichung:
    $$\begin{array}{rcll} (4y-4)+2y &=& 8 & \\ 4y-4+2y &=& 8 & \\ 6y-4 &=& 8 & \mid +4 \\ 6y &=& 12 & \mid :6 \\ y &=& 2 & \end{array}$$
  - Einsetzen der Lösung in eine der beiden Gleichungen, z.B. in II :
    $$\begin{array}{rcl} x &=& 4\cdot 2-4 \\ x &=& 8-4 \\ x &=& 4 \end{array}$$
  - Notieren der Lösungsmenge: $L=\{(4|2)\}$.
- **Additionsverfahren**:
  - Durch Addieren/Subtrahieren der Gleichung oder eines Vielfachen der Gleichung werden die beiden Gleichungen so miteinander verknüpft, dass eine Variable wegfällt.
    $$\begin{array}{lrcrcll} I: & x &+& 2y &=& 8 & \\ \underline{II:} & \underline{-x} &\underline{+}& \underline{4y} &\underline{=}& \underline{4} & \\ I+II: & (1-1)\cdot x &+& (2+4)\cdot y &=& 8+4 & \\ & 0\cdot x &+& 6\cdot y &=& 12 & \mid :6 \\ & & & y &=& 2 & \end{array}$$

- Einsetzen des Ergebnisses in eine der beiden Gleichungen, z. B. in I :

$$\begin{aligned} x + 2\cdot 2 &= 8 \\ x + 4 &= 8 \quad | \; -4 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

- Notieren der Lösungsmenge: $L=\{(4|2)\}$.

c) **Mögliche Lösungsmengen**:

Da lineare Gleichungen mit zwei Variablen Geraden im Koordinatensystem entsprechen, sind drei mögliche Fälle denkbar.

Fall	Geraden g und h	Schnittpunkte	Lösungsmenge
(1)	schneiden sich	genau ein Schnittpunkt	L besteht aus einem Element
(2)	parallel, aber nicht identisch	kein Schnittpunkt	$L=\emptyset$
(3)	identisch	unendlich viele Schnittpunkte	L ist unendlich groß

Beispiel für Fall (2):

$$\begin{array}{lrcrcrl} I: & -10x & + & 6y & = & 8 & | \; :2 \\ \underline{II:} & \underline{35x} & \underline{-} & \underline{21y} & \underline{=} & \underline{63} & | \; \underline{:7} \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcrcr} I': & -5x & + & 3y & = & 4 \\ \underline{II':} & \underline{5x} & \underline{-} & \underline{3y} & \underline{=} & \underline{9} \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcrcr} I'+II': & (-5+5)\cdot x & + & (3-3)\cdot y & = & 4+9 \\ & 0\cdot x & + & 0\cdot y & = & 13 \\ & & & 0 & = & 13 \end{array}$$

Das Ergebnis ist eine falsche Aussage, damit ist $L=\emptyset$.

Beispiel für Fall (3):

$$\begin{array}{lrcl} I: & 6x-3y & = & 3 \\ II: & y & = & 2x-1 \end{array}$$

Die rechte Seite von II in die erste Gleichung einsetzen (Einsetzungsverfahren):

$$\begin{aligned} 6x - 3(2x-1) &= 3 \\ 6x-6x+3 &= 3 \\ 3 &= 3 \end{aligned}$$

Das Ergebnis ist eine wahre Aussage, damit gilt:
$L=\{(x|y) \mid y=2x-1\}$; alle Punkte der Geraden gehören zur Lösungsmenge.

5 Bruchterme und Bruchgleichungen

1. Bruchterme

Stehen bei einem Term Variablen auch im **Nennerterm**, so spricht man von einem **Bruchterm**.
Die Nullstellen des Nennerterms gehören nicht zur **Definitionsmenge** des Bruchterms.

Beispiele:

a) $\frac{3+x}{2-x}$; $D=\mathbb{Q}\setminus\{2\}$ b) $\frac{1}{x^2+2}$; $D=\mathbb{Q}$ c) $\frac{x^2}{x(x-1)}$; $D=\mathbb{Q}\setminus\{0;1\}$

Bruchterme können erweitert und gekürzt werden. Dabei kann sich die (größt mögliche) Definitionsmenge ändern:

Beispiel:
Erweitern: $\frac{3+x}{2-x} = \frac{(3+x)\cdot(x+1)}{(2-x)\cdot(x+1)}$; $D=\mathbb{Q}\setminus\{-1;2\}$ (erweitert mit $(x+1)$)

Kürzen: $\frac{x^2}{x(x-1)} = \frac{x}{x-1}$; $D=\mathbb{Q}\setminus\{0;1\}$ (gekürzt mit x)

Beispiele für die Bestimmung des **Hauptnenners**, d.h. des kleinsten gemeinsamen Nenners :

- 1. Nenner: $x^2-2x = x(x-2)$
  2. Nenner: $2x-4 = 2(x-2)$
  Der Hauptnenner ist damit $2\cdot x\cdot(x-2)$.

- 1. Nenner: $x-1 = x-1$
  2. Nenner: $1-x = -1\cdot(x-1)$
  Beide Nenner sind bis auf den Faktor (-1) gleich. Der Hauptnenner ist damit wahlweise $x-1$ oder $1-x$.

Bruchterme können wie Brüche addiert, subtrahiert, multipliziert und dividiert werden.

Beispiele für die Grundrechenarten:

Addition:

$$\frac{2}{x+1} + \frac{3x}{x-1} = \frac{2\cdot(x-1)}{(x+1)\cdot(x-1)} + \frac{3x\cdot(x+1)}{(x-1)\cdot(x+1)}$$
$$= \frac{2(x-1) + 3x(x+1)}{(x-1)(x+1)}$$
$$= \frac{2x-2+3x^2+3x}{(x-1)(x+1)}$$
$$= \frac{3x^2+5x-2}{(x-1)(x+1)}$$

Subtraktion:

$$\frac{2}{x+1} - \frac{3x}{x-1} = \frac{2\cdot(x-1)}{(x+1)\cdot(x-1)} - \frac{3x\cdot(x+1)}{(x-1)\cdot(x+1)}$$
$$= \frac{2(x-1) - 3x(x+1)}{(x-1)(x+1)}$$
$$= \frac{2x-2-3x^2-3x}{(x-1)(x+1)}$$
$$= \frac{-3x^2-x-2}{(x-1)(x+1)}$$

Multiplikation:

$$\frac{x-2}{x+3} \cdot \frac{x-1}{x-3} = \frac{(x-2)(x-1)}{(x+3)(x-3)}$$

Division:

$$\frac{x-2}{x+3} : \frac{x-1}{x-3} = \frac{x-2}{x+3} \cdot \frac{x-3}{x-1} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x+3)(x-1)}$$

2. Bruchgleichungen

a) Graphische Lösung:

Die x-Koordinate des Schnittpunkts der Funktionen

$f:\ f(x)=\frac{3}{x-1};\ D_f=\mathbb{Q}\setminus\{1\}$

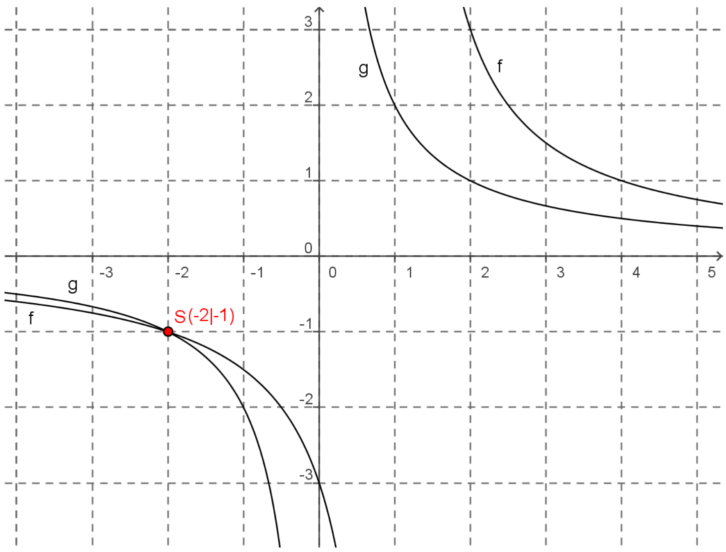
$g:\ g(x)=\frac{2}{x};\ D_g=\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ ist

Lösung der Gleichung

$\frac{3}{x-1}=\frac{2}{x};\ D=\mathbb{Q}\setminus\{0;1\}$.

Aus der Zeichnung kann damit die Lösungsmenge der Gleichung entnommen werden:

$L=\{-2\}$.



b) Rechnerische Lösung:

$$\frac{3}{x-1}=\frac{2}{x}$$

- Bestimmung der Definitionsmenge der Bruchgleichung: $D=\mathbb{Q}\setminus\{0;1\}$
- Bestimmung des Hauptnenners:
  1. Nenner: $x-1$
  2. Nenner: x

  ergibt den Hauptnenner: $(x-1)x$
- Lösung der Gleichung:

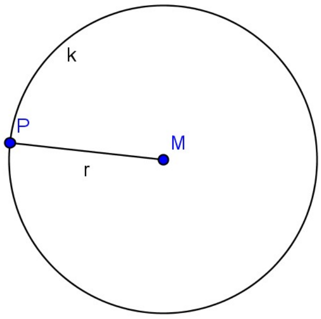
$$\begin{array}{rcll}
\frac{3}{x-1} &=& \frac{2}{x} & \mid\ \cdot(x-1)x \\
\frac{3\cdot(x-1)x}{x-1} &=& \frac{2\cdot(x-1)x}{x} & \\
3x &=& 2(x-1) & \\
3x &=& 2x-2 & \mid\ -2x \\
x &=& -2\ \in D &
\end{array}$$

1) Beide Seiten mit einem gemeinsamen Nennerterm (möglichst dem Hauptnenner) multiplizieren

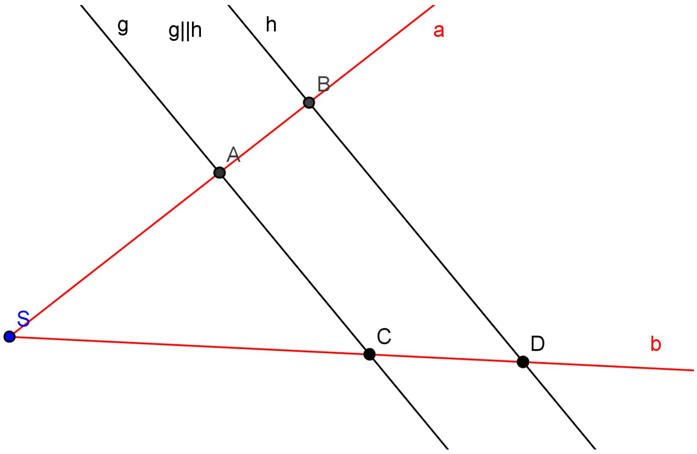
2) Die vereinfachte Gleichung lösen.

- Lösungsmenge: $L=\{-2\}$

6 Geometrie

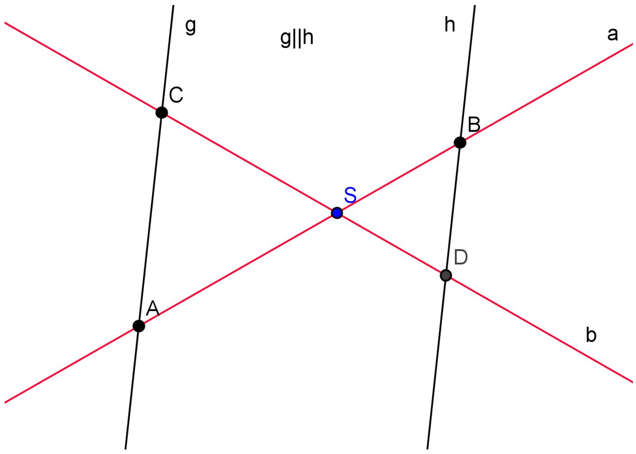


1. **Kreisumfang und Kreisfläche:**
   Für einen Kreis um M mit Radius r gilt:
   Kreisumfang: $U = 2\pi \cdot r = \pi \cdot Durchmesser$
   Kreisfläche: $A = \pi \cdot r^2$
   Dabei ist **π = 3,14159265...** die **Kreiszahl „pi“**.
   π ist eine irrationale Zahl.
2. **Strahlensätze:**
   Zwei Halbgeraden a und b mit gemeinsamen Anfangspunkt S bzw. zwei sich in S schneidende Geraden, werden von zwei parallelen Geraden $g \| h$ geschnitten.



   1. Strahlensatz:
   Das Verhältnis zwei beliebiger Streckenlängen der (Halb-)-gerade a ist gleich dem Verhältnis der entsprechenden Streckenlängen der (Halb-)geraden b.

   (1) $\frac{\overline{SA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{CD}}$ (2) $\frac{\overline{SA}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{SD}}$
   (3) $\frac{\overline{SB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SD}}{\overline{CD}}$



   2. Strahlensatz:
   Das Verhältnis der auf g und h liegenden Strecken ist gleich dem Verhältnis der auf a oder b liegenden, <u>von S aus</u> verlaufenden Streckenabschnitte:

   (1) $\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{SA}}{\overline{SB}}$ (2) $\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{SD}}$

   Umkehrung des 1. Strahlensatzes:
   Werden zwei (Halb-)geraden a und b, die sich in S schneiden, von zwei Geraden g und h so geschnitten, dass Gleichheit zweier Verhältnisse entsprechender Streckenabschnitte besteht, so sind die Geraden g und h parallel: g||h.

   Die **Umkehrung des 2. Strahlensatzes** gilt **nicht**!

3. **Ähnliche Figuren**
Wird eine Originalfigur im Maßstab k ($k \in \mathbb{Q}^+$) vergrößert (k>1) oder verkleinert (k<1), so nennt man beide Figuren zueinander **ähnlich**. Im Fall k=1 sind beide Figuren kongruent. Der Faktor k ist der **Ähnlichkeitsfaktor**.
Es gilt:
   1. Einander entsprechende Winkel sind stets gleich groß.
   2. Längenverhältnisse einander entsprechender Strecken sind stets gleich.

7 Stochastik

1. Definitionen:

Zufallsexperimente, bei denen jedes mögliche Ergebnis **gleich wahrscheinlich** ist, nennt man **Laplace-Experimente**.
Ergebnisraum oder **Ergebnismenge**: Menge aller möglichen Ergebnisse Ω.

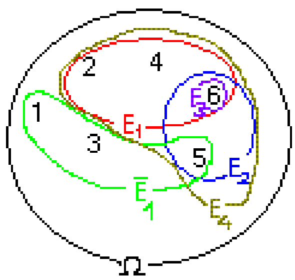
Beispiele:

(1) Werfen eines Spielwürfels : $\Omega=\{1;2;3;4;5;6\}$

(2) 2malige Werfen einer 1€-Münze: (W=Wappen, Z=Zahl)
$\Omega=\{WW;WZ;ZW;ZZ\}$

Eine Teilmenge des Ergebnisraums nennt man **Ereignis**. Ergebnisse, die zu diesem Ereignis gehören, heißen **günstige Ergebnisse**.
Ist E sogar gleich Ω, so spricht man von einem **sicheren Ereignis**. Ist $E=\emptyset$, so heißt es **unmögliches Ereignis**. Das **Gegenereignis** $\overline{E}$ ist die Menge aller ungünstigen Ergebnisse: $\overline{E}=\Omega\setminus E$

Beispiele zum Werfen eines Spielwürfels:



E_1 : „Eine gerade Augenzahl wird geworfen“
$E_1=\{2;4;6\}$
E_2: „Eine Augenzahl größer als 4 wird geworfen“
$E_2=\{5;6\}$
Es gilt:
$\overline{E_1}=\{1;3;5\}$
E_3: „Es soll E1 **und** E2 zugleich eintreten“
$E_3=E_1\cap E_2=\{6\}$ (gelesen: „E_1 geschnitten E_2)
E_4: „Es soll mindestens eines der Ereignisse E_1 **oder** E_2 eintreten“
$E_4=E_1\cup E_2=\{2;4;5;6\}$ (gelesen: „E_1 vereinigt E_2“)

2. **Gesetz der großen Zahlen**: (siehe Grundwissen Klasse 6 Nr. 4)

Ein Zufallsexperiment wird n-mal durchgeführt. Ein Versuchsergebnis tritt dabei k-mal ein.
Für große n schwankt die relative Häufigkeit $\frac{k}{n}$ nur noch wenig und nähert sich der **Wahrscheinlichkeit des Ergebnisses**. („Gesetz der großen Zahlen“).
Die relative Häufigkeit ist damit ein Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses.

3. **Wahrscheinlichkeit bei Laplace-Experimenten:**

Da jedes Ergebnis gleich wahrscheinlich ist, hat jedes Ergebnis eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}$.

Die **Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses** P(E):

$$P(E) = \frac{\text{Anzahl der Ergebnisse, bei denen E eintritt}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse des Zufallsexperiments}} = \frac{\text{Anzahl der günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}}$$

Beispiel:
Werfen eines Würfels:

$$P(\text{„ Eine 6 Werfen “}) = \frac{1}{6}$$

E: „Eine gerade Zahl werfen“

$$P(E) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \ .$$

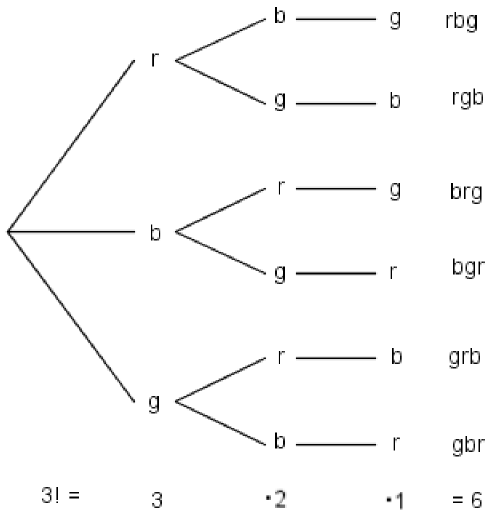
4. **Zählprinzip:** (siehe Grundwissen Klasse 5 Nr. 4)

Fakultät:
$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$
(gelesen: „n Fakultät)
Anzahl der Möglichkeiten, n verschiedene Elemente anzuordnen.
Es gilt: $0! = 1$ und $1! = 1$

Beispiele:

(1) Eine rote (r), eine blaue (b) und eine gelbe (g) Blume sollen auf einem Fensterbrett angeordnet werden!

Es gibt $3!=6$ Möglichkeiten.



(2) Wie viele verschiedene 4stellige Zahlen lassen sich aus den Ziffern 1;2;3;4;5;6 bilden, wenn jede Zahl höchstens einmal vorkommen darf?

$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$

